Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

12 de Dezembro de 2006

Semana 11

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

   e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Considere as funções definidas por $f(x) = 1$ e $g(x) = x$. Determine:

   (a) as séries de Fourier associadas a f e g no intervalo $[-1,1]$;

   (b) as séries de senos associadas a f e g no intervalo $[0,1]$;

   (c) as séries de cosenos associadas a f e g no intervalo $[0,1]$.

5. Considere a equação de propagação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (*)$$

(a) Mostre que as suas soluções estacionárias (isto é, que não dependem do tempo) são da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1$, $u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$u(0,t) = 20, \qquad u(1,t) = 60, \qquad u(x,0) = 75.$$

6. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t \geq 0,\ x \in [0,1]) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1, \end{cases}$$

onde c é um parâmetro real.

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y \in [0,1]) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y). \end{cases}$$

8. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \quad (x \in [0,\pi]) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

9. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \quad (x \in [0,2\pi]) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x\ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0\ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos(2\pi(x-y)) - \cos(2\pi(x+y)) \end{cases}$$

para $x,y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.